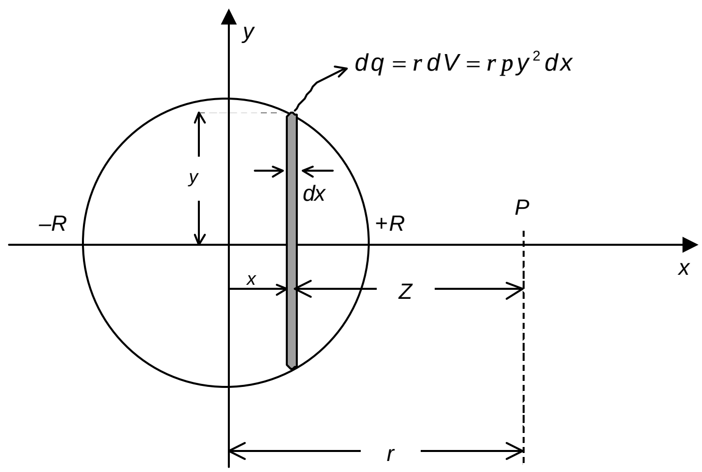
2. CAMPO ELÉCTRICO

PROBLEMA 10. Determinar el campo eléctrico producido por una esfera de radio R, cargada uniformemente con densidad volumétrica r, en un punto ubicado a distancia r del centro $\left(r > R\right)$.

SOLUCIÓN

La esfera se considerará formada por una infinidad de discos de distintos radios, como se muestra en el siguiente esquema.



De acuerdo a resultados anteriores, la fuerza producida por un disco cargado con densidad de carga s uniforme, sobre una carga q_0 ubicada a una distancia Z de su centro es :

$$F = \frac{s \bullet q_0}{2e_0} \bullet \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}}\right),$$

donde $s = \dfrac{Q}{pR^2}$, siendo R el radio y Q la carga del disco.

Luego, la magnitud del campo eléctrico producido por el disco, en el punto en que está ubicada la carga q_0, es :

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{Q}{2pe_0R^2} \bullet \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{R^2 + Z^2}}\right)$$

En consecuencia, la contribución al campo eléctrico de uno de los discos que constituyen la esfera será :

$$dE_x = \frac{dq}{2pe_0 y^2} \bullet \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{y^2 + Z^2}} \right),$$

siendo dq la carga del disco e y el radio.

Antes de sumar las contribuciones de todos los discos, es necesario arreglar la expresión de dE_x hasta dejar solo una variable. Para ello usamos :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ Z &= r - x \\ dq &= r \bullet p y^2 dx \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} dE_x &= \frac{r \cancel{p}\, \cancel{y^2}\, dx}{2 \cancel{p}\, e_0\, \cancel{y^2}} \left(1 - \frac{(r-x)}{\sqrt{R^2 - x^2 + (r-x)^2}} \right) \\ &= \frac{r\, dx}{2e_0} \left(1 - \frac{(r-x)}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2rx}} \right) \end{aligned}$$

Siendo x la única variable, basta integrar desde $x = -R$ hasta $x = +R$ y se tendrá el resultado buscado.

$$E_x = \frac{r}{2e_0} \left[\int_{-R}^{+R} dx - \int_{-R}^{+R} \frac{r\, dx}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rx}} + \int_{-R}^{+R} \frac{x\, dx}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rx}} \right].$$

Con la sustitución $R^2 + r^2 - 2rx = u$; $\frac{du}{dx} = -2r$, la segunda integral queda :

$$-\frac{1}{2} \int_{u_i}^{u_s} \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{2} \bullet 2u^{1/2} \Big|_{u_i}^{u_s} = \sqrt{R^2 + r^2 + 2r\,R} - \sqrt{R^2 + r^2 - 2r\,R}$$

Con la misma sustitución anterior, la última integral resulta :

$$\int_{u_i}^{u_s} \frac{\left(R^2+r^2-u\right)(-du)}{4r^2u^{1/2}} = -\frac{1}{4r^2}\left[\left(R^2+r^2\right)\int_{u_i}^{u_s}\frac{du}{u^{1/2}} - \int_{u_i}^{u_s} u^{1/2}\,du\right]$$

$$= -\frac{1}{4r^2}\left[\left(R^2+r^2\right)\left(2\sqrt{R^2+r^2-2rR}-2\sqrt{R^2+r^2+2rR}\right)- \right.$$

$$\left. \frac{2}{3}\left(R^2+r^2-2rR\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(R^2+r^2+2rR\right)^{3/2}\right]$$

$$= -\frac{1}{4r^2}\left[2\left(R^2+r^2\right)\left[(r-R)-(r+R)\right]-\frac{2}{3}\left[(r-R)^3-(r+R)^3\right]\right]$$

Luego,

$$E_x = \frac{r}{2e_0}\left[2R-\left\{(r+R)-(r-R)\right\}-\frac{1}{4r^2}\left\{2\left(R^2+r^2\right)(-2R)- \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{2}{3}\left(-6r^2R-2R^3\right)\right\}\right]$$

$$E_x = \frac{r}{2e_0}\left[\cancel{2R}-\cancel{2R}-\frac{1}{4r^2}\left(-4R^3-\cancel{4r^2R}+\cancel{4r^2R}+\frac{4}{3}R^3\right)\right]$$

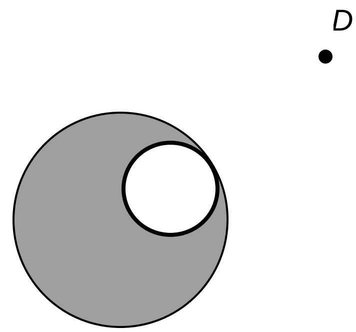
$$E_x = \frac{r}{2e_0}\bullet\frac{1}{\cancel{4}r^2}\cancel{4}R^3\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{rR^3\bullet\cancel{2}}{\cancel{2}\bullet e_0r^2\bullet 3}$$

$$E_x = \frac{rR^3}{3e_0r^2}$$

Puesto que $Q = r\bullet\frac{4}{3}pR^3$; se encuentra finalmente : $E_x = \frac{Q}{4p\,e_0\,r^2}$

Nótese que E_x depende de r^{-2}, de la misma manera que si fuese una carga puntual. Este resultado se obtiene también de una manera mucho más sencilla, usando la ley de Gauss.

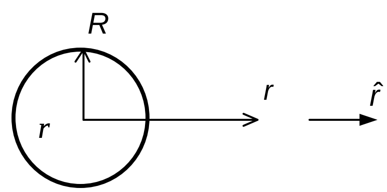
PROBLEMA 11. Una esfera de radio R tiene un hueco esférico no concéntrico de radio $R/2$, como muestra la figura adjunta. Una carga se distribuye uniformemente con densidad ρ, sobre el volumen representado por la zona achurada. Determinar $\vec{E}$ en el punto D.



SOLUCIÓN

De acuerdo a un resultado anterior (PROBLEMA 10), el campo eléctrico producido por una esfera maciza, cargada uniformemente con densidad volumétrica ρ, está dado por :

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad ,$$



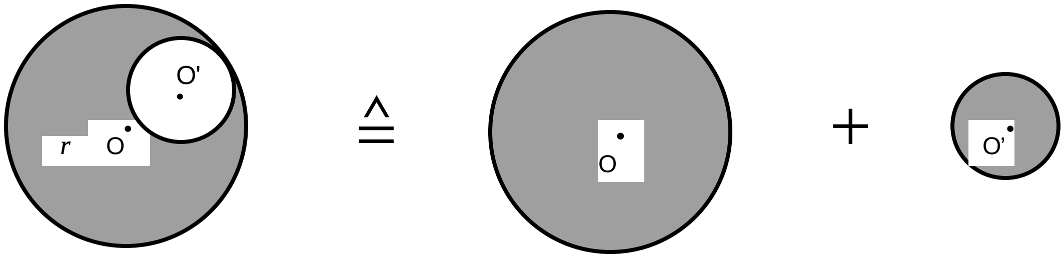
es decir, el campo eléctrico es radial y tiene la misma magnitud en puntos que equidistan del centro de la esfera, siempre que $r > R$.

Si $r < R$, la situación aún no ha sido estudiada y, por lo tanto, no se puede asegurar que la expresión anterior para $\vec{E}$ sea válida; de todos modos se advierte la misma condición de simetría para puntos que equidistan del centro.

Volviendo al problema, nótese que el resultado anterior basta para encontrar el campo en el punto D. En efecto, de acuerdo al principio de superposición escribiremos la igualdad:

Campo en D = campo producido por esfera maciza de radio R y densidad ρ, más campo producido por esfera maciza excéntrica de radio $R/2$ y densidad $-\rho$.

Gráficamente :



Algebraicamente:

$$\vec{E} = \frac{r R^3}{3e_0 r^2} \bullet \hat{r} + \frac{(-r)(R/2)^3}{3e_0 (r - R/2)^2} \bullet \hat{r} \ ,$$

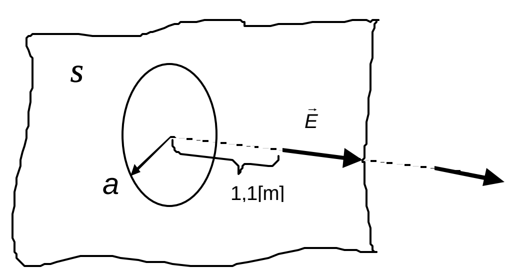
lo cual es el resultado buscado, para el campo en el punto D, a una distancia $r > R$ del centro de la esfera.

Obsérvese bien la manera en que se utilizó un resultado previo para resolver un problema aparentemente completo. El primer término del resultado final representa la contribución de la esfera maciza de radio R y densidad r, mientras que el segundo representa la contribución de la esfera excéntrica, de radio $R/2$ y densidad $-r$.

En forma más compacta, el resultado queda:

$$\vec{E} = \frac{r R^3}{3e_0} \bullet \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8(r - R/2)^2} \right) \bullet \hat{r} \ .$$

PROBLEMA 12. En un plano infinito cargado con $s = 2{,}5 \bullet 10^{-6} [C/m^2]$, se encuentra un orificio circular. A una distancia de 1,1[m] desde el centro del orificio, sobre el eje, la intensidad del campo eléctrico tiene magnitud $E = 1{,}4 \bullet 10^5 [N/C]$. Calcular el radio del orificio.



<u>SOLUCIÓN</u>

La magnitud del campo eléctrico E puede considerarse como resultante de la superposición de dos campos eléctricos en el punto dado:

(a) campo debido al plano infinito con carga $s = 2{,}5 \bullet 10^{-6}[C/m^2]$

(b) campo debido a un disco de radio R con carga $s = -2{,}5 \bullet 10^{-6}[C/m^2]$

Entonces,

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{debido al plano}} + \vec{E}_{\text{debido al disco}}$$

Usando los resultados del PROBLEMA 5, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{s}{2e_0}\hat{u}_x + \left\{\frac{-s}{2e_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}\right)\right\}\hat{u}_x$$

donde $x = 1{,}1[m]$ y a es el radio del orificio.

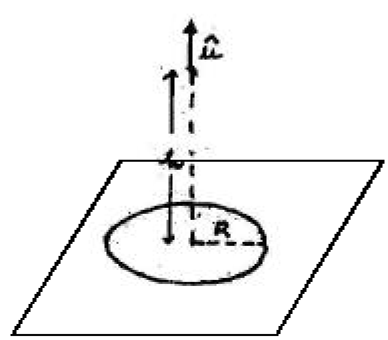
La magnitud del vector $\vec{E}$ es: $E = \frac{s}{2e_0}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Introduciendo los valores numéricos, el valor de a se calcula fácilmente:

$$a = \sqrt{\frac{s^2}{4e_0^2} \bullet \frac{1{,}1^2}{1{,}96 \bullet 10^{10}} - 1{,}1^2}$$

$$a = 0{,}15[m] .$$

PROBLEMA 13. Un plano horizontal infinito cargado con densidad superficial s , tiene un agujero circular de radio R .



(a) Determinar la intensidad del campo eléctrico en un punto ubicado en el eje del agujero a una distancia h del plano.

(b) ¿Cuál será la posición de equilibrio de una partícula con carga q y masa m , ubicada en el eje del agujero? Discutir sobre los signos de q y s .

<u>SOLUCIÓN</u>

(a) **<u>PRIMER MÉTODO</u>**: Igual que en el PROBLEMA 12, se hace el cálculo de $\vec{E}$ como superposición de dos campos eléctricos.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \text{campo de un plano infinito} \\ \text{cargado con } +s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{campo de un disco de radio } R \\ \text{cargado con } -s \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \left[\frac{s}{2e_0} + \left\{ \frac{-s}{2e_0} \left(1 \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right\} \right] \hat{u}$$

$$\vec{E} = \frac{s\,h}{2e_0 \sqrt{R^2 + h^2}} \, \hat{u}$$

<u>SEGUNDO MÉTODO</u>: Usando las ideas del PROBLEMA 5, se hace el cálculo de $\vec{E}$ mediante anillos diferenciales cargados con densidad superficial s .

La magnitud del campo debido a un anillo de radio r y carga q es (ver resultado PROBLEMA 4) :

$$E = \frac{q\,h}{4pe_0 \left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \ .$$

Si el anillo es un elemento diferencial de área con carga dq, la magnitud del campo eléctrico es :

$$dE = \frac{h\,dq}{4pe_0 \left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \ , \qquad \text{pero} \qquad dq = s\,dA = s\,2p\,r\,dr \ .$$

Luego,

$$dE = \frac{h\,s \bullet 2p\,r\,dr}{4pe_0 \left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \ .$$

Entonces,

$$E = \int dE = \int_R^{\infty} \frac{hs}{4e_0} \bullet \frac{2r\,dr}{\left(h^2 + r^2\right)^{3/2}} \ ,$$

es decir,

$$E = \frac{s\,h}{2e_0 \sqrt{h^2 + r^2}}$$

(b) Si $q > 0$, se encontrará en equilibrio sobre $(h > 0)$ el plano horizontal cargado con $s > 0$.

Si $q < 0$, se encontrará en equilibrio bajo $(h < 0)$ el plano horizontal cargado con $s > 0$.

Para que la partícula con carga q y masa m esté en equilibrio debe cumplirse que:

$$\| q\vec{E} \| = \| m\vec{g} \| \quad .$$

Luego,

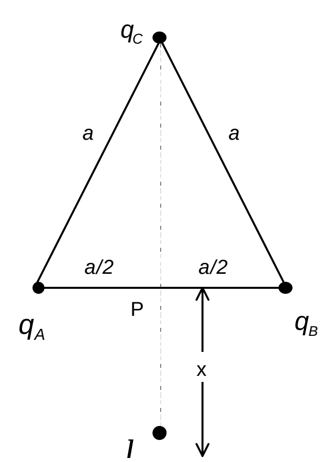
$$\frac{s\,q\,h}{2e_0\sqrt{h^2+R^2}} = mg$$

$$\frac{s^2 q^2 h^2}{4e_0^{\,2}\left(h^2+R^2\right)} = m^2 g^2$$

Resolviendo, se obtiene:

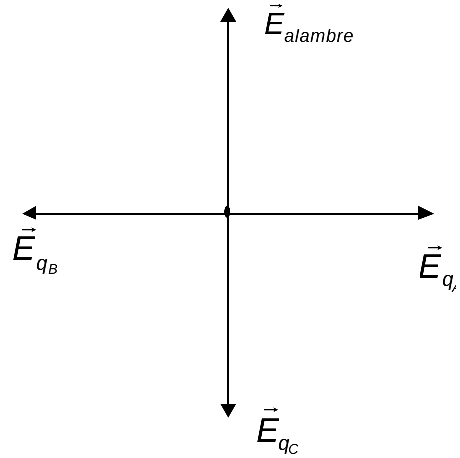
$$h = \pm \frac{2mg\,e_0 R}{\sqrt{q^2 s^2 - 4m^2 g^2 e_0^{\,2}}} \quad .$$

PROBLEMA 14. Tres cargas puntiformes están ubicadas en los vértices A, B y C de un triángulo equilátero de lado $a = 0{,}20[m]$. Las cargas valen $q_A = 10^{-8}\ [C]$, $q_C = 2 \bullet 10^{-8}\ [C]$ y q_B es desconocida. Determine q_B y la distancia "x" a la que debe pasar un alambre recto muy largo, perpendicular al plano del triángulo, cargado con densidad lineal $l = 8 \bullet 10^{-8}\ [C/m]$, para que la intensidad del campo eléctrico resultante en P sea cero.



SOLUCIÓN

Si el campo eléctrico resultante $\vec{E}$ en el punto P es cero, debe cumplirse que los campos de cada una de las distribuciones de carga tengan las direcciones indicadas en la figura y además:



$$\vec{E} = \vec{E}_{q_A} + \vec{E}_{q_B} + \vec{E}_{q_C} + \vec{E}_{alambre} = 0\ .$$

Entonces,

$$\left\| \vec{E}_{q_A} \right\| = \left\| \vec{E}_{q_B} \right\| \qquad (1)$$

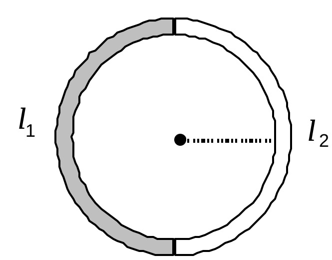
$$\left\| \vec{E}_{q_C} \right\| = \left\| \vec{E}_{alambre} \right\| \qquad (2)$$

Escribiendo más explícitamente las igualdades anteriores, se obtiene :

De (1) $$\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad q_B = q_A = 10^{-8}[C]$$

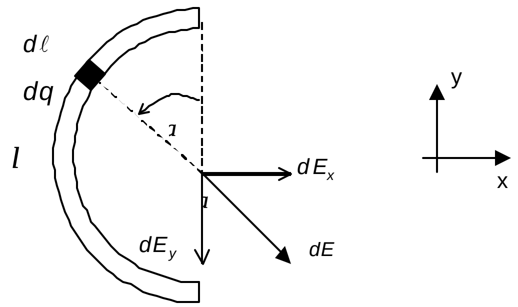
De (2) $$\frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3\lambda a^2}{2q_C} = 0{,}24[m]$$

PROBLEMA 15. Dos semianillos con distribuciones de carga $\lambda_1 = -\frac{1}{9}[nC/m]$ y λ_2 desconocida se unen formando un anillo de radio $r = 0{,}10[m]$. Determinar λ_2 si la magnitud del campo eléctrico en el centro del anillo es $E_0 = 10[N/C]$.



SOLUCIÓN

Cálculo del campo eléctrico en el centro de un semianillo cargado.



La magnitud del campo producido por un elemento diferencial del anillo, de longitud $d\ell$ y carga dq es :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

además,

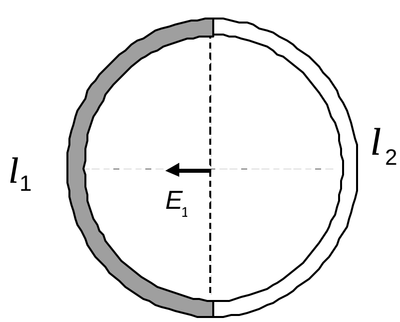
$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \int d\vec{E} = \int d\vec{E}_x + \underbrace{\int d\vec{E}_y}_{\text{vale cero por simetría}}$$

luego, $$\vec{E} = \int d\vec{E} \quad \Rightarrow \quad E = \int dE_x = \int dE\,\mathrm{sen}\,\alpha = \int \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{sen}\,\alpha\ .$$

Usando $d\ell = r\,d\alpha$, se obtiene,

$$E = \int_0^{\pi} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{sen}\,\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ .$$

Aplicando el resultado anterior a nuestro problema : $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0$



$$E_0 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

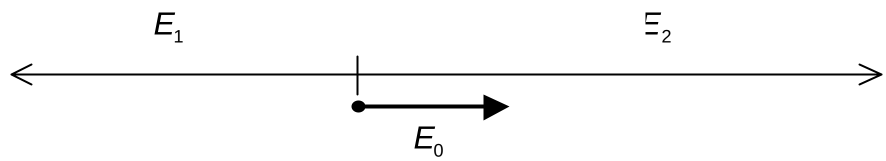
Despejando λ_2 se obtiene:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - 2\pi\varepsilon_0 r E_0$$

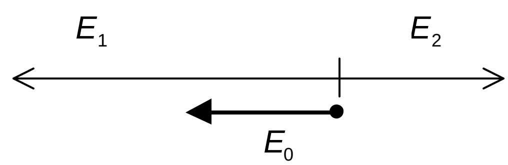
$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{4\pi\varepsilon_0}{2} r E_0$$

Hay dos soluciones :

(1) Si $\vec{E}_0 = 10\hat{u}_x \quad \Rightarrow \quad l_2 = -\dfrac{10^{-9}}{9} - \dfrac{0{,}10 \bullet 10}{9 \bullet 10^9 \bullet 2} = -\dfrac{1}{6}10^{-9}\ [C/m]$

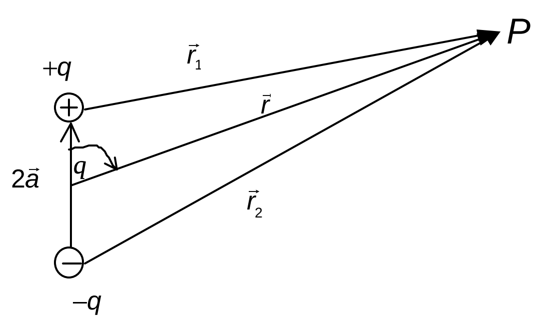


(2) Si $\vec{E}_0 = -10\hat{u}_x \quad \Rightarrow \quad l_2 = -\dfrac{10^{-9}}{9} + \dfrac{0{,}10 \bullet 10}{9 \bullet 10^9 \bullet 2} = -\dfrac{1}{18}10^{-9}\ [C/m]$



PROBLEMA 16. Encontrar el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico a grandes distancias.

SOLUCIÓN



En el punto P :

$$\vec{E} = \frac{1}{4p\, e_0}\left(\frac{q\,\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{q\,\vec{r}_2}{r_2^3}\right)$$

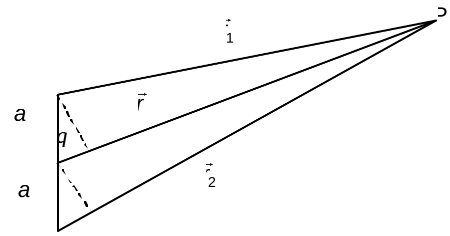
Además,

$$\vec{a} + \vec{r}_1 = \vec{r}$$

$$\vec{a} + \vec{r} = \vec{r}_2 \quad ,$$

pues $\vec{r}$ va desde el punto medio entre las cargas hasta el punto P.

De acuerdo a la figura, puede escribirse las siguientes aproximaciones para las magnitudes de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:



$$r_1 \simeq r - a\cos\theta$$

$$r_2 \simeq r + a\cos\theta$$

Al reemplazar $\vec{r}_1$, r_1, $\vec{r}_2$ y r_2 en la expresión de $\vec{E}$, tratando de dejar todo en términos de $\vec{r}$ y θ , resulta:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bullet \left[\frac{q(\vec{r} - \vec{a})}{(r - a\cos\theta)^3} - \frac{q(\vec{r} + \vec{a})}{(r + a\cos\theta)^3} \right]$$

Tomando aproximaciones de primer orden, usando :

$$(1 \pm x)^{-n} \simeq 1 \mp nx \qquad \text{cuando} \quad x^2 \ll 1, \ \text{tenemos}$$

$$(r - a\cos\theta)^{-3} = r^{-3}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-3} \simeq r^{-3}\left(1 + \frac{3a}{r}\cos\theta\right)$$

$$(r + a\cos\theta)^{-3} = r^{-3}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-3} \simeq r^{-3}\left(1 - \frac{3a}{r}\cos\theta\right),$$

Luego :

$$\vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\vec{r} - \vec{a})r^{-3}\left(1 + \frac{3a}{r}\cos\theta\right) - (\vec{r} + \vec{a})r^{-3}\left(1 - \frac{3a}{r}\cos\theta\right)\right]$$

$$\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[6a\cos\theta\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) - 2\vec{a}\right]$$

El resultado anterior está expresado en términos de un vector unitario radial y otro en la dirección de $\vec{a}$. Conviene expresarlo en términos de dos componentes ortogonales; por ejemplo, una componente radial y otra tangencial.

Para ello:

$$2\vec{a} = 2a\cos q\,\hat{r} - 2a\,sen q\,\hat{u}_q$$

Entonces,

$$\vec{E} \simeq \frac{q}{4p\,e_0\,r^3}\left[4a\cos q\,\hat{r} + 2a\,sen q\,\hat{u}_q\right].$$

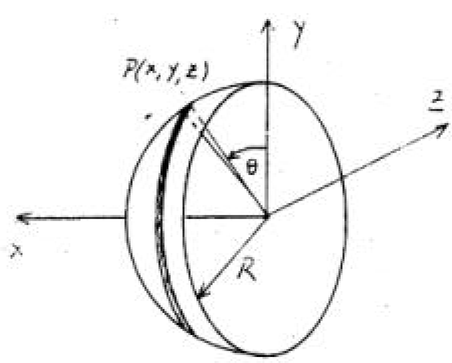
En términos de la magnitud $p = 2aq$, correspondiente al momento dipolar eléctrico, las componentes radial y tangencial del campo eléctrico son:

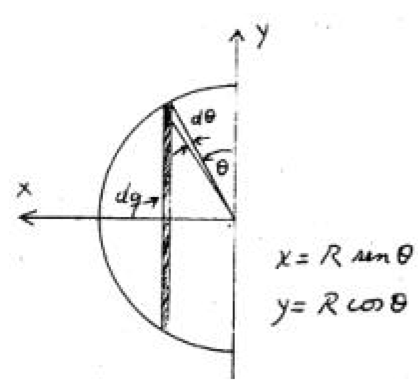
$$E_r \simeq \frac{2p\cos q}{4p\,e_0\,r^3}$$

$$E_q \simeq \frac{p\,sen q}{4p\,e_0\,r^3}$$

PROBLEMA 17. Un recipiente hemisférico no conductor de radio interior R tiene una carga total q, distribuida uniformemente en su superficie interior. Encontrar el campo eléctrico en su centro de la curvatura.

SOLUCIÓN





El cascarón se considera como formado por innumerables anillos de distinto radio. El campo producido por un anillo en un punto de su eje es (ver PROBLEMA 13) :

$$E = \frac{1}{4pe_0} \bullet \frac{qx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} \quad ,$$

donde q es la carga en el anillo, a su radio y x la distancia entre el centro y el punto del eje en el cual se da la magnitud de $\vec{E}$.

De acuerdo a lo anterior, uno de los anillos que constituyen el cascarón, produce en su centro de curvatura un campo eléctrico cuya magnitud es :

$$dE = \frac{1}{4pe_0} \bullet \frac{dq \bullet x}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}} \quad ,$$

donde $dq = s \bullet dA = \frac{q}{\cancel{2p} R^2} \bullet \cancel{2p}\, y \bullet R dq$ es la carga de un anillo de radio y , ancho $R dq$, ubicada a la distancia x del centro de curvatura.

Luego,

$$dE = \frac{1}{4pe_0} \bullet \int_0^{p/2} \frac{q}{\cancel{2pR^2}} \frac{\cancel{2pR^2} \cos q \; dq \; R sen q}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$= \int_0^{p/2} \frac{q}{4pe_0 R^2} \bullet \frac{1}{2} sen 2q \, dq$$

Finalmente :

$$E = \frac{q}{8pe_0 R^2} \bullet 1 \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = \frac{-q\,\hat{i}}{8pe_0 R^2} \, .$$